РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РЮКЗАКЕ МЕТОДОМ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Лабораторная работа 6

Постановка задачи. Имеется n неделимых предметов:

$I = \{i = \overline{1,n}\}$. Заданы: p_i - вес, c_i - ценность i - го предмета. $1 \le i \le n$.

Требуется уложить в рюкзак некоторую совокупность предметов с общей стоимостью не менее числа c и минимального веса.

<u>Математическая модель задачи</u>. Введём переменные x_i, $i = \overline{1,n}$

$$\begin{cases} I, & \textit{если предмет укладывается в рюкзак;} \\ 0, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Имеем оптимизационную задачу

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \min, \quad x \in X,$$

$$X = \{x : \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \ge c, \quad x_i = 0 \vee 1, \quad i = \overline{1,n}\} \tag{1}$$

Схема решения.

0-итерация.

Находим оценку $\xi_0 = \xi(x)$. Для этого решаем задачу

$$f(x) \to \min, \quad x \in X, \tag{2}$$

где $X = \{x : \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \ge c, \quad i \le x_i \le 1, \quad i = 1, n\}$

Она представляет из себя непрерывную задачу линейного программирования. Пусть x^* решение задачи (2). Положим $\xi_0 = f(x^*)$. Если x^* есть план задачи (1), то x^* и её решение. В противном случае разбиваем множество X на два подмножества, укладывая или неукладывая один из предметов (например, первый):

$X_{11} = \{x : x_1 = 0, \ x \in X\}$, $X_{12} = \{x : x_1 = 1, \ x \in X\}$.

Список множества для первой итерации $S_1 = \{X_{11,} X_{12}\}$.

Рекорд итерации $r_0 = \infty$.

....

K – итерация. Пусть $S_k = \{X_{k1}, X_{k2}, ..., X_{ks(k)}\}$ - список множеств для этой итерации. Находим оценку $\xi_k = \min\limits_{1 \le i \le s(k)} \xi(X_{ki})$, где $\xi(X_{ki})$ - оценки снизу значений функции задачи (1) на подмножестве X_{ki}. Они находятся, как решения непрерывных задач:

$f(x) \to \min, \ x \in X_{ki}, \ \ 1 \le i \le s(k)$

Пусть x^{*i}, $1 \le i \le s(k)$ решения задач (3).

Тогда полагаем

$\xi(X_{ki}) = f(x^{*i})$.

Если при некотором i, $1 \le i \le s(k)$ задач (3) не имеет решения, то $\xi(X_{ki}) = \infty$.

Пусть среди решений x^{*i}, $1 \le i \le s(k)$ непрерывных задач (1) есть планы задач (1): $x^{k1}, x^{k2}, .., x^{kl} \in X$.

Вычисляем рекорд итерации

$$r_k = \min_{1 \le i \le l} \{f(x^{ki}), r^{k-1}\}, \ f(x^k) = r^k,$$

а) если $r^k = \xi^k$, то план x^k решение задачи (1)ж

б) если $r^k - \xi^k = \varepsilon > 0$, то $x^\varepsilon = x^k - \varepsilon$ - оптимальный план.

Если не выполняются случай а) либо случай б) (т.е. приближение нас не удовлетворяет), то переходим к следующей итерации. Составляем список множеств для ($k+1$)- й итерации $S_{k+1.}$ Для этого разбиваем множество $X_k(\xi(X_k)=\xi_k)$ на два подмножества (укладывая или неукладывая в рюкзак один из оставшихся в X_k предметов); X_k^1 и X_k^2. В S_{k+1} включаем множества из S_k и X_k^1, X_k^2, исключив множество X_k. Из списка S_{k+1} следует также исключить те множества списка S_k, для которых оценка снизу больше либо равна r^k.

……………………………………………………………………………………..

Итерации продолжают либо до получения оптимального плана, либо до достижения заданной степени точности ε. Так как множества планов задачи (1) конечно, то всегда можно построить оптимальный план.

Метод решения непрерывных задач типа (2), (3).

Пусть требуется решить задачу (2). Для каждого $i,\quad 1\le i\le n$ вычисляем относительный вес на единицу стоимости $\dfrac{p_i}{c_i}$. Ясно, что оптимальный план задачи (2) будет построен, если засыпать в рюкзак в первую очередь предметы (для непрерывной задачи их можно дробить) с наименьшим числом $\dfrac{p_i}{c_i}$.

Засыпая в рюкзак предметы в порядке возрастания числа до достижения заданной стоимости груза c, строим оптимальный план задачи (2). Задачи (3) решаются аналогично.

Пример.

Рассмотрим задачу о рюкзаке с данными из таблицы.

N	1	2	3	4
c_i	20	10	12	7
p_i	3	4	5	2

n=4, c=30, математическая модель имеет вид:

$$3x_1+4x_2+5x_3+2x_4\to\min \tag{4}$$

$$20x_1+10x_2+12x_3+7x_4\ge 30 \tag{5}$$

$$x_i=0\cup 1,\quad i=\overline{1,4} \tag{6}$$

Решение

O- итерация.

Решаем задачу (4), (5) с условием

$$0\le x_i\le 1 \tag{7}$$

Вычисляем отношение $\dfrac{p_i}{c_i},\quad i=\overline{1,4}$

$$\frac{p_1}{c_1}=\frac{3}{20},\quad \frac{p_2}{c_2}=\frac{2}{5},\quad \frac{p_3}{c_3}=\frac{5}{12},\quad \frac{p_4}{c_4}=\frac{2}{7}.$$

Загружаем в рюкзак предметы в порядке возрастания относительной ценности: первый, четвёртый, второй третий. Оптимальный план задачи (4), (5), (7)

$$x^*=\{x_1^*=x_4^*=1, x_2^*=0.3, x_3^*=0\},$$

$$\xi_0=\xi(x)=3\cdot 1+4\cdot 0{,}3+5\cdot 0+2\cdot 1=6{,}2$$

x^* не является планом задачи (4)-(6).

Множество X разбиваем на подмножества: $S_1 = \{X_{11}, X_{12}\}$
$X_{11} = \{x \in X : x_1 = 0\}$; $X_{12} = \{x \in X : x_1 = 1\}$; $r_0 = \infty$.
1-итерация.

Имеем $\xi(X_{11}) = \infty$. Так как 10+12+7=29<30,
$\xi(X_{12}) = \xi(X)$, $x^{*2} = x^*$, $\xi_1 = \xi_0$.
На итерации планы не построены: $r_1 = \infty$
Множество X_{11} исключаем из списка, а множество X_{12} разбиваем на два подмножества

$$X_{21} = \{x \in X_{12} : x_2 = 0\} = \{x \in X : x_1 = 1, x_2 = 0\}$$
$$X_{22} = \{x \in X : x_1 = x_2 = 1\}, \quad S_2 = \{X_{21}, X_{22}\}$$

2-итерация.

$$\xi(X_{21}) = 6{,}25, \qquad x^{*1} = \{1, 0, \frac{1}{4}, 1\},$$
$$\xi(X_{22}) = 7, \qquad x^{*2} = \{1, 1, 0, 0\}, \qquad \xi_2 = 6{,}25.$$

Получен рекордный план итерации $x^2 = x^{*2}$, $r_2 = 7$, x^2 будет ε-оптимальный план: $\varepsilon = r_2 - \xi_2 = 0{,}75$. Так как p_i целое число, то условие $r_k - \varepsilon_k < 1$ означает, что рекордный план оптимальный. Следовательно, x^2 решение задачи
$x^0 = \{1, 1, 0, 0\}$, $f(x^0) = 7$.

Задание.

Записать математическую модель задачи. Решить задачу о рюкзаке с данными из таблицы при $n = 5$, $c = 30$.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
c_i	20	10	12	7	7	10	12	16	9	7	13	10	9	8	15	20	13	17
p_i	3	4	5	2	3	4	3	5	1	3	4	2	1	5	3	5	4	4

методом ветвей и границ. Нарисовать дерево вариантов. Номера предметов в i - м варианте (i - номер студента по списку в журнале) выбираются следующим образом: $k = \overline{0,4}$,

$$1 \le i \le 14 : i + k,$$
$$15 \le i \le 24 : i + 2k - 14,$$
$$25 \le i \le 30 : i + 3k - 24.$$